OPCIÓN A

A.1.- Dado el sistema de ecuaciones dependientes del parámetro **a**: $\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$ se pide

a) Discusión del mismo en función del parámetro **a**

b) Resolución en los casos de compatibilidad

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=1-4a+3-2+3a-2=-a \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -a=0 \Rightarrow a=0$$

$$\forall x \in \Re-\{0\} = rang(A)=3=número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ a=0 \quad \left(Al\ ser\ una\ ecuación\ \hom ogenea\ sera\ \ Compatible\ In\det er\min ado\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Solución\ para\ el\ Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$$y+z=0 \Rightarrow y=-z \Rightarrow x-2z+z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow Solución(\lambda\ ,-\lambda\ ,\lambda)$$

$$Solución\ para\ el\ Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$\begin{cases} x+2y+z=a \\ x+y-az=a \\ 2x+3y+z=a \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a & 1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-a}=\frac{a-2a^2+3a-a+3a^2-2a}{-a}=-\frac{a^2+a}{a}=-\frac{a(a+1)}{a}=-(a+1)$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & a & -a \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix}}{-a}=\frac{a-2a^2+a-2a+a^2-a}{-a}=-\frac{-a^2-a}{a}=-\frac{-a(a+1)}{a}=a+1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}}{-a}=\frac{a+4a+3a-2a-3a-2a}{-a}=-\frac{-a}{a}=1$$

$$Solución(-a-1\ ,a+1\ ,1)$$

A.2.- Dado los puntos **A = (1 , 1 , 1)**, **B = (- 1 , 3 , 1)**, **C = (1 , 0 , 0)** y **D = (0 , 2 , 0)**; se pide hallar el punto **P** perteneciente a la recta determinada por **A** y **B** tal que el triángulo **CDP** sea rectángulo con hipotenusa **CP**

$$\overrightarrow{AB} = (-1 , 3 , 1) - (1 , 1 , 1) = (-2 , 2 , 0) \equiv (-1 , 1 , 0) \Rightarrow P\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow P(1 - \lambda , 1 + \lambda , 1)$$

$$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{DP} \Rightarrow \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DP} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{CD} = (0 , 2 , 0) - (1 , 0 , 0) = (-1 , 2 , 0) \\ \overrightarrow{DP} = (1 - \lambda , 1 + \lambda , 1) - (0 , 2 , 0) = (1 - \lambda , 1 + \lambda - 2 , 1) = (1 - \lambda , \lambda - 1 , 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(-1 , 2 , 0) \cdot (1 - \lambda , \lambda - 1 , 1) = 0 \Rightarrow -1 + \lambda + 2\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P(1 - 1 , 1 + 1 , 1) \Rightarrow$$

$$P(0 , 2 , 1)$$

A.3.-Sea f la función definida para todo número real **x** de modo que para los valores de **x** pertenecientes al intervalo cerrado **[- 1 , 1]** se tiene $f(x)=(x+1)(x-1)^2$ y para los valores de **x** no pertenecientes a dicho intervalo se tiene $f(x)=0$. Se pide:

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad

b) Hallar, razonadamente, su valor máximo, indicando el valor o valores de **x** en donde se alcanza

$a)$

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<-1 \\ (x+1)(x-1)^2 \, si \quad -1\le x\le 1 \\ 0 \quad si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=0 \\ f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=(-1+1)(-1-1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow Continua \\ \begin{cases} f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=(1+1)(1-1)^2=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow Continua \end{cases}$$

$f(x)$ *es CONTINUA*

$$f'(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<-1 \\ (x-1)^2+2\cdot(x-1)(x+1) \quad si \quad -1\le x\le 1 \\ 0 \quad si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 0 \quad si \quad x<-1 \\ [(x-1)+2\cdot(x+1)](x-1) \quad si \quad -1\le x\le 1 \\ 0 \quad si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f'(x)=0 \\ f'(-1)=\lim_{x\to -1^+} f'(x)=[(-1-1)+2\cdot(-1+1)](-1-1)^2=[(-2)+2\cdot 0](-2)^2=-8 \end{cases} \Rightarrow -8\ne 0 \Rightarrow No\ der. \\ \begin{cases} f'(1)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=[(1-1)+2\cdot(1+1)](1-1)^2=[0+2\cdot 2]\cdot 0^2=0 \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow Es\ derivable \end{cases}$$

$b)$

$$f'(x)=[(x-1)+2\cdot(x+1)](x-1)=(x-1+2x+2)\cdot(x-1)=(3x+1)\cdot(x-1)\Rightarrow$$

$$f'(x)=0\Rightarrow (3x+1)\cdot(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} 3x+1=0\Rightarrow x=-\frac{1}{3} \\ x-1=0\Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow f''(x)=3(x-1)+(3x+1)=3x-3+3x+1$$

$$f''(x)=6x-2=2\cdot(3x-1)\Rightarrow \begin{cases} f''\left(-\frac{1}{3}\right)=2\cdot\left[3\left(-\frac{1}{3}\right)-1\right]=2\cdot(-2)=-4\Rightarrow Máximo \\ f''(1)=2\cdot(3.1-1)=2.2=4\Rightarrow Mínimo \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{3}\Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{1}{3}+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{16}{9}=\frac{32}{27}\Rightarrow\left(-\frac{1}{3},\frac{32}{27}\right)\Rightarrow Máximo \\ x=1\Rightarrow f(1)=(-1+1)\cdot(1-1)^2=0\cdot 0^2=0\Rightarrow(1,0)\Rightarrow Mínimo \end{cases}$$

A.4.- Halla la función **f** definida en todo número real que verifica las dos condiciones siguientes:

a) $f'(x) = x^2 e^x$

b) Su gráfica pasa por el punto **(0 , 2)**

$$F(x) = \int x^2 e^x \ dx = x^2 e^x - 2 \cdot \int x e^x \ dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2 \cdot \int e^x \ dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2 \cdot e^x + K$$

$$\begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x \ dx \\ e^x \ dx = dv \Rightarrow v = \int e^x \ dx = e^x \end{cases} \qquad \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ e^x \ dx = dv \Rightarrow v = \int e^x \ dx = e^x \end{cases}$$

$$F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x + K \Rightarrow F(0) = 2 \Rightarrow 2 = \left(0^2 - 2.0 + 2\right) \cdot e^0 + K \Rightarrow 2 = 2 \cdot 1 + K \Rightarrow K = 0$$

$$F(x) = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^x$$

OPCIÓN B

B.1.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $\mathbf{A^2 - 4A + 4I_3}$

b) Calcular, si existe, la inversa de la matriz **A**

$a)$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ 4A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\ 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right. \Rightarrow A^2 - 4A + 4I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 4A + 4I_3 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow Existe\ A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj(A)^t \Rightarrow (A)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj(A)^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

B.2. a) Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje **OX** en el punto **(4 , 0)** y pasa por el punto $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$

b) Hallar la ecuación de la otra tangente a esta circunferencia que pasa por el origen de coordenadas

$a)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4^2 + 0^2 - 2a.4 - 2b.0 + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \\ \left(\frac{8}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 - 2a.\left(\frac{8}{5}\right) - 2b.\left(\frac{6}{5}\right) + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow \end{cases} \\ 2x + 2yy' - 2a - 2by' = 0 \Rightarrow 2.4 + 2.0.0 - 2a - 2b.0 = 0 \Rightarrow 8 - 2a = 0 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 - 8.4 + 4^2 + b^2 - R^2 = 0 \Rightarrow b^2 - R^2 = 0 \\ \frac{64}{25} + \frac{36}{25} - \frac{16}{5} \cdot 4 - \frac{12}{5} b + 4^2 + b^2 - R^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{100}{25} - \frac{64}{5} - \frac{12}{5} b + 16 = 0 \Rightarrow -\frac{12}{5} b = -16 - 4 + \frac{64}{5} \Rightarrow$$

$$-\frac{12}{5} b = -20 + \frac{64}{5} \Rightarrow -\frac{12}{5} b = -\frac{36}{5} \Rightarrow b = 3 \Rightarrow 3^2 - R^2 = 0 \Rightarrow R^2 = 9 \Rightarrow R = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

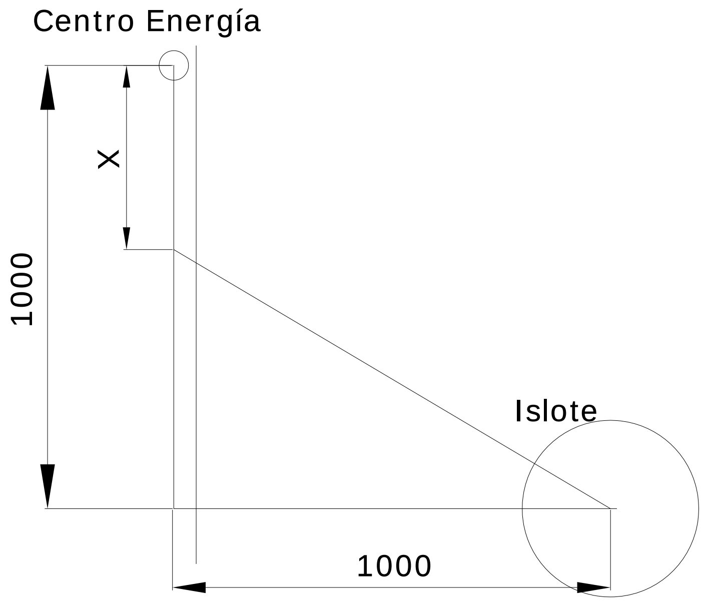
$$x^2 + y^2 - 2.4.x - 2.3y + 4^2 + 3^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$$

$b)$

$$2x + 2y.y' - 2.4 - 2.3y' = 0 \Rightarrow 2.0 + 2.0.y' - 8 - 6y' = 0 \Rightarrow -8 - 6y' = 0 \Rightarrow -6y' = 8 \Rightarrow y' = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{4}{3} \cdot (x - 0) \Rightarrow 3y = -4x \Rightarrow 4x + 3y = 0$$

B.3.- Un pequeño islote dista 1 Km. de una costa rectilínea. Queremos instalar en dicho islote una señal luminosa que se ha de alimentar con un tendido eléctrico. La fuente de energía esta situada en la costa en un punto distante 1 Km. del punto de la costa más próximo al islote. El coste del tendido submarino, por unidad de longitud, es $\frac{5}{3}$ del tendido en tierra.¿A que distancia de la fuente de energía debe de empezar el tendido submarino para conseguir un coste mínimo?



$$P = 1.x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{1^2 + (1-x)^2} \Rightarrow P = x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 - 2x + x^2}$$

$$P = x + \frac{5}{3} \cdot \sqrt{2 - 2x + x^2} \Rightarrow P' = 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{-2 + 2x}{\sqrt{2 - 2x + x^2}} = 1 + \frac{-5 + 5x}{3\sqrt{2 - 2x + x^2}}$$

$$P' = \frac{3\sqrt{2 - 2x + x^2} - 5 + 5x}{3\sqrt{2 - 2x + x^2}} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2 - 2x + x^2} - 5 + 5x = 0 \Rightarrow 3\sqrt{2 - 2x + x^2} = 5 - 5x \Rightarrow$$

$$9\left(2 - 2x + x^2\right) = (5 - 5x)^2 \Rightarrow 18 - 18x + 9x^2 = 25 - 50x + 25x^2 \Rightarrow 16x^2 - 32x + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 32^2 - 4.7.16 = 1024 - 224 = 800 \Rightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{800}}{32} = 1 \pm \frac{\sqrt{50}}{8} \Rightarrow Solución \Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{50}}{8} \ Km$$

B.4,- Hallar el área del recinto limitado por las funciones

$$y = 2 - x^4$$
$$y = x^2$$

$$2 - x^4 = x^2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = t \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \\ x^2 = -2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-2} \Rightarrow \forall x \notin \Re \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(0) = 0^2 = 0 \\ y(0) = 2 - 0^4 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2 > 0 \Rightarrow$$

$$A = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^4\right) dx - \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = 2 \cdot [x]_{-1}^{1} - \frac{1}{5} \cdot \left[x^5\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_{-1}^{1} = 2 \cdot [1 - (-1)] - \frac{1}{5} \cdot \left[1^5 - (-1)^5\right] - \frac{1}{3} \cdot \left[1^3 - (-1)^3\right]$$

$$A = 2 \cdot 2 - \frac{1}{5} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 = 4 - \frac{2}{5} - \frac{2}{3} = \frac{60 - 6 - 10}{15} = \frac{44}{15} \, u^2$$